

© TĚLESA

1. Objem a povrch mnohostěnů

GEOMETRICKÉ TĚLESO - prostorový omezený souvřaslý geometrický útvar
- **HRANICE** tělesa = takí max. **POVRCH** a ukázaná plocha

OBJEM TĚLESA - zn. V (volumen = lat. objem)

- každému reálnému číslu přivázání tělesu tak, že

1. shodná tělesa mají shodný objem

2. jestliže je těleso složeno z n nespojitelných těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles

3. objem krychle o hraně délky 1 (m, cm, ...) - tzv. jednotková krychle - je roven 1 ($m^3, cm^3, \dots$)

☞ hrady s rozměry 4 cm, 3 cm, 2 cm



- tzv. koloid má 24 jednotkových krychlí

$$V = 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ cm}^3 = 24 \text{ cm}^3$$

známá: $V = abc$

a, b, c rozměry hrady (v jednotkách)

- při odvození rovnice pro objem dalších těles využíváme objem hrady a Cavalieriho princip

CAVALIERIHO PRINCIP

jestliže pro 2 tělesa existují taková rovnice, že
hrady rovnice s ní normálně políží na
rovninných útvarech se stejnými obsahy,
mají tělesa stejný objem

☞ 2 sloupce stejného počtu stejných mincí
- každý sloupec jiný tvar



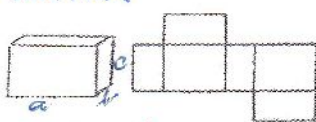
$$V_1 = V_2$$

POVRCH TĚLESA - zn. S - obsah hranice tělesa

- tzv. "rozvinutí" hranice tělesa do roviny (vytvoří se síť) nebo složeno se
hranicu tělesa z jednoduchých rovinných útvarů, pak je povrch roven součtu
obsahů rovinných útvarů, kterými se skládá hranice tělesa

MNOHOSTĚNY

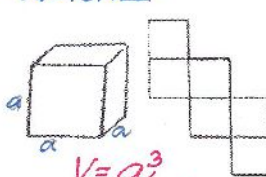
- **KVÁDR**



$$V = abc$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

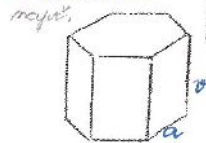
- **KRYCHLE**



$$V = a^3$$

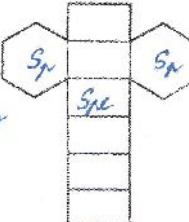
$$S = 6a^2$$

- **HRANOL**

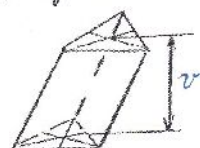


$$V = S_p \cdot v$$

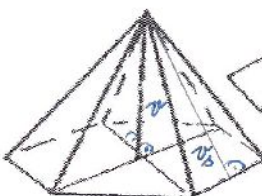
$$S = 2S_p + S_{pl}$$



S_p - obsah podstavy
 S_{pl} - obsah pláště
v. výška tělesa



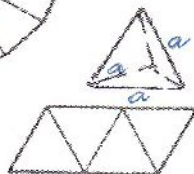
- **JEHLA**



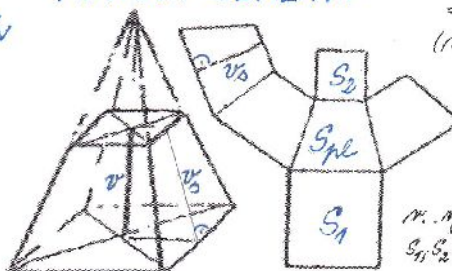
$$V = \frac{1}{3} S_p v$$

$$S = S_p + S_{pl}$$

ČTYŘSTĚN



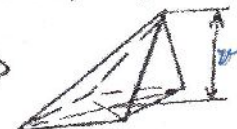
- **KOMOLÝ JEHLAN**



$$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$S = S_1 + S_{pl} + S_2$$

- pokud výška tělesa
není 1 na postavení
=> KOSA TĚLESA
(mávu plati)



v. výška komol. jehlanu
 S_1, S_2 - obsahy podstav

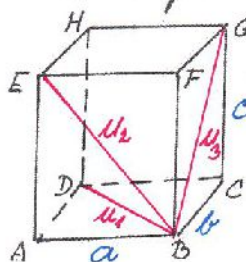
PRO SLOŽITĚJŠÍ TĚLESA využíváme
indukční metodu počtu (+ koef. čtyř.)

Přklady

① Vrchol obsahů 3 stěn krychle, které mají společný vrchol, je 279 cm², 5. H. komíny krychle jsou v poměru 2:3:5. Vrchol

a) délky hran krychle

b) délky stěnových úhlopříček



$$a) S_1 + S_2 + S_3 = 279 \quad a:b:c = 2:3:5$$

$$ab + ac + bc = 279 \quad \text{ozn. 1 díl... } x$$

$$6x^2 + 10x^2 + 15x^2 = 279$$

$$31x^2 = 279$$

$$x^2 = 9$$

$$[|x| = 3]$$

$$x = 3 \Rightarrow$$

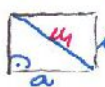
$$[-3 \text{ nepř. } x \text{ ER dílna}]$$

$$a = 6 \text{ cm}$$

$$b = 9 \text{ cm}$$

$$c = 15 \text{ cm}$$

b) K Pyth. věty



$$u_1^2 = a^2 + b^2$$

$$u_1 = \sqrt{36 + 81}$$

$$u_1 = \sqrt{117} = 10,8 \text{ cm}$$



$$u_2^2 = a^2 + c^2$$

$$u_2 = \sqrt{36 + 225}$$

$$u_2 = \sqrt{261} = 16,2 \text{ cm}$$



$$u_3^2 = b^2 + c^2$$

$$u_3 = \sqrt{81 + 225}$$

$$u_3 = \sqrt{306} = 17,5 \text{ cm}$$

LZE ŘEŠIT JINAK

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \\ \frac{a}{c} = \frac{2}{5} \end{array} \right. \text{ k } c \text{ } \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3a}{2}$$

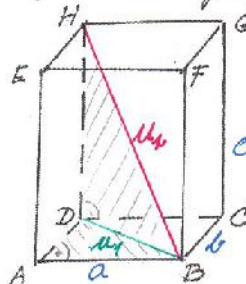
$$\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow c = \frac{5a}{2}$$

$$\text{dos. } ab + ac + bc = 279$$

$$a \cdot \frac{3a}{2} + a \cdot \frac{5a}{2} + \frac{3a}{2} \cdot \frac{5a}{2} = 279$$

$$6a^2 + 10a^2 + 15a^2 = 279 \cdot 4 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

② Vrchol objemu a poměr krychle, jehož tělesová úhlopříčka má délku u a jeho stěny, které protínají těmto vrcholům, mají obsahy v poměru 1:2:3.



$$u_4 = u \quad ① \quad S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 2 : 3$$

$$ab : ac : bc = 1 : 2 : 3$$

ku myj. k a pomocí c

$$\frac{ab}{ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{c}{2}$$

$$\frac{ab}{bc} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{c}{3}$$

$$⑤ \quad V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = \frac{2u}{7} \cdot \frac{3u}{7} \cdot \frac{6u}{7}$$

$$V = \frac{36u^3}{249}$$

$$c \text{ myj. pomocí } u_4 \quad ② \quad u_4^2 = u_1^2 + c^2$$

$$(u_4 = u)$$

$$u_4^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$u^2 = \left(\frac{c}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2$$

$$u^2 = \frac{c^2}{9} + \frac{c^2}{4} + c^2 \cdot 1,36$$

$$36u^2 = 4c^2 + 9c^2 + 36c^2$$

$$36u^2 = 49c^2$$

$$36u^2 = 49c^2$$

$$c^2 = \frac{36u^2}{49}$$

$$c = \frac{6u}{7} \quad (-\frac{6u}{7} \text{ nepř.})$$

$$\Rightarrow a = \frac{c}{3} = \frac{6u}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2u}{7}$$

$$b = \frac{c}{2} = \frac{6u}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3u}{7}$$

$$\text{dosad. do } V, S$$

$$④ \quad \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$$

$$\text{dosad. do } V, S$$

$$⑥ \quad S = 2(ab + ac + bc)$$

$$S = 2\left(\frac{2u}{7} \cdot \frac{3u}{7} + \frac{2u}{7} \cdot \frac{6u}{7} + \frac{3u}{7} \cdot \frac{6u}{7}\right)$$

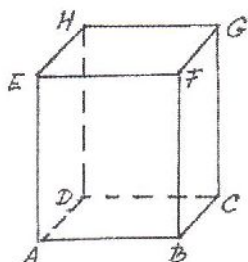
$$S = 2 \cdot \frac{6u^2 + 12u^2 + 18u^2}{49}$$

$$S = 2 \cdot \frac{36u^2}{49}$$

$$S = \frac{72u^2}{49}$$

$$S = \frac{72u^2}{49}$$

- ③ Obsahy 3 stěn krádau, které mají spoličný uchol, jsou 72 cm², 96 cm² a 108 cm². Vypočítu objem krádau.



$$S_1 = ab = 72 \text{ cm}^2$$

$$S_2 = ac = 96 \text{ cm}^2$$

$$S_3 = bc = 108 \text{ cm}^2$$

$$V = ? \text{ cm}^3$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} = \frac{72}{96} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3c}{4}$$

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{72}{108} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2c}{3}$$

$$S_1 = ab$$

$$72 = \frac{2c}{3} \cdot \frac{3c}{4}$$

$$\frac{6c^2}{12} = 72$$

$$c^2 = 42$$

$$c^2 = 144$$

$$c = 12 \text{ cm}$$

(12 mnyh.)

$$a = \frac{2c}{3} = \frac{2 \cdot 12}{3}$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3c}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4}$$

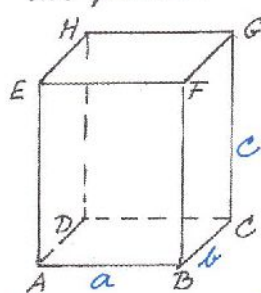
$$b = 9 \text{ cm}$$

$$V = abc$$

$$V = 8 \cdot 9 \cdot 12$$

$$V = 864 \text{ cm}^3$$

- ④ Krádau má objem 810 cm³, jeho normíry jsou v poměru 2:3:5. Vypočítu jeho s.12. povrch.



$$V = 810 \text{ cm}^3$$

$$a:b:c = 2:3:5$$

$$S = ? \text{ cm}^2$$

(1. mnyh.) podle p. ①

$$V = abc$$

$$810 = 2x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$810 = 30x^3$$

$$x^3 = 27$$

$$x = 3$$

$$1 \text{ díl} \dots x \Rightarrow a = 2x \quad b = 3x$$

$$c = 5x$$

$$a = 2x = 6 \text{ cm}$$

$$b = 3x = 9 \text{ cm}$$

$$c = 5x = 15 \text{ cm}$$

$$S = 2(ab + ac + bc) = 2(6 \cdot 9 + 6 \cdot 15 + 9 \cdot 15) \text{ cm}^2$$

$$S = 2(54 + 90 + 135) = 2 \cdot 279 = 558 \text{ cm}^2$$

(2. mnyh.) podle p. ②

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{2}{5} \Rightarrow b = \frac{3a}{2}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow c = \frac{5a}{2}$$

mýstlysi v n obou poměrech a, b, c pomocí a,

budeme vyj. b, c pomocí a,

$$V = abc$$

$$810 = a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{5a}{2} \quad | \cdot 4$$

$$810 \cdot 4 = 15a^3$$

$$270 \cdot 4 = 5a^3 \quad | :5$$

$$54 \cdot 4 = a^3$$

$$a^3 = 216$$

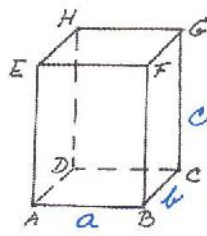
$$a = 6 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ cm}$$

$$c = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ cm}$$

další mnyh. 1. mnyh.

- ⑤ Vh nadojimu kráu krádau je 1500 hl vody, hloubka vody je 2,5 m. Vypočítu normíry dna, je-li jedm normí nadojimu 0,4 m v šířce mý dechf.



$$V = 1500 \text{ hl} = 150000 \text{ L} = 150000 \text{ dm}^3 = 150 \text{ m}^3$$

$$h = c = 2,5 \text{ m}$$

$$b = a + 4$$

$$ab = ? \text{ m}$$

$$V = abc$$

$$150 = a(a+4) \cdot h$$

$$150 = (a^2 + 4a) \cdot 2,5$$

$$60 = a^2 + 4a$$

$$a^2 + 4a - 60 = 0$$

$$(a-6, b-4, c-60) = 0$$

$$(a+10)(a-6) = 0$$

$$a_1 = -10 \text{ mnyh.} \quad a_2 = 6 \text{ m}$$

-3-

HEKTO... 100

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 60}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-4 \pm 16}{2}$$

$$= 6 \text{ m}$$

$$= -10 \text{ m mnyh.}$$

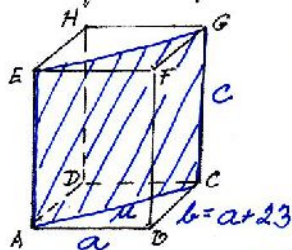
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ROZMĚRY DNA

$$a = 6 \text{ m}$$

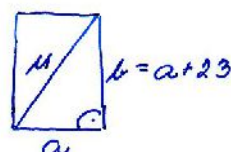
$$b = a + 4 = 10 \text{ m}$$

- ⑥ Úhlopříčný řez hranolu kolmý k rovině podstavy je čtverec s obsahem 540 4225 cm². Jedna podstavová hrana je o 23 cm delší než druhá. Vypočítejte objem a povrch tělesa.



$$\begin{aligned} S_{\square} &= 4225 \text{ cm}^2 \\ c &= \mu \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \mu &= 65 \text{ cm} \\ \mu &= 65 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$b = (a + 23) \text{ cm}$$



$$\begin{aligned} \mu^2 &= a^2 + b^2 \\ 65^2 &= a^2 + (a + 23)^2 \end{aligned}$$

$$V = abc$$

$$V = 33 \cdot 56 \cdot 65$$

$$V = 120\,000 \text{ cm}^3$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

$$S = 2(33 \cdot 56 + 33 \cdot 65 + 56 \cdot 65)$$

$$S = 2(1848 + 2145 + 3640)$$

$$S = 15\,266 \text{ cm}^2$$

$$a = 33 \text{ cm}$$

$$b = a + 23$$

$$= 56 \text{ cm}$$

$$c = \mu = 65 \text{ cm}$$

$$4225 = a^2 + a^2 + 46a + 529$$

$$2a^2 + 46a - 3696 = 0$$

$$a^2 + 23a - 1848 = 0$$

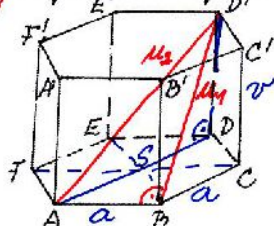
$$a_{1/2} = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 + 4 \cdot 1848}}{2}$$

$$a_{1/2} = \frac{-23 \pm \sqrt{7921}}{2}$$

$$a_{1/2} = \frac{-23 \pm 89}{2} = \begin{cases} 33 \\ -56 \end{cases}$$

(délka ∈ ℝ⁺)

- ⑦ Vypočítejte objem a povrch pravidelného šestiúhelníkového hranolu, jsou-li dány délky jeho tělesových úhlopříček $u_1 = 12 \text{ cm}$ a $u_2 = 13 \text{ cm}$ vyznačující se úhlem 60°.



$$u_1 = 12 \text{ cm}$$

$$u_2 = 13 \text{ cm}$$

$$\textcircled{a} \text{ K } \triangle ABD'$$



$$u_1^2 = u_1^2 + a^2$$

$$a^2 = u_1^2 - u_1^2$$

$$a^2 = 13^2 - 12^2$$

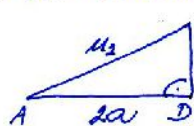
$$a^2 = 169 - 144$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$(-5 \text{ nepř.})$$

$$\textcircled{b} \text{ K } \triangle ADD'$$



$$u_2^2 = u_2^2 - (2a)^2$$

$$v^2 = u_2^2 - 4a^2$$

$$v^2 = 13^2 - 4 \cdot 25$$

$$v^2 = 69$$

$$v = \sqrt{69} = 8,3 \text{ cm}$$

$$V = S_p \cdot v$$

$$V = 6S_{\Delta} \cdot v$$

$$V = 6 \cdot \frac{1}{2} a v_a v$$

$$V = 3 a v_a v$$

$$V = 3 \cdot 5 \cdot 4,33 \cdot 8,3 \text{ cm}^3$$

$$V = 539,1 \text{ cm}^3$$

[líže ověřuji s odmocninami bez násob. ⇒ výsledek jako v uč.]

$$V = 3 a v_a v = 3 \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{69}$$

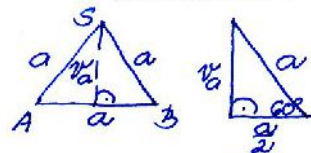
$$V = 539,5 \text{ cm}^3$$

$$S = 2S_p + S_{pe} = 2 \cdot 6S_{\Delta} + 6S_{\square}$$

$$S = 12 \cdot \frac{a v_a}{2} + 6 a v = 6 a (v_a + v) \quad -4$$

$$S = 6 \cdot 5 \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \sqrt{69} \right) = 379,1 \text{ cm}^2$$

$$\textcircled{c} \text{ K } S_p = 6S_{\Delta} \Rightarrow \text{průměr rovinný } \Delta$$



$$\sin 60^\circ = \frac{v_a}{a}$$

$$v_a = a \sin 60^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_a = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,33 \text{ cm}$$

[NEBO K P.V.]

$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$v_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- 8) Prodloužil-li se hrana dané krychle o 5 cm, vzrostl se její objem o 485 cm³.
5.46 Uveďte poměr původní i rozšířené krychle.

$$a' = (a+5) \text{ cm} \quad g' = 6a'^2 = 6(a+5)^2 = 6(a^2 + 10a + 25)$$

$$\Delta V = 485 \text{ cm}^3 \quad \Delta V = V' - V = a'^3 - a^3 = (a+5)^3 - a^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 5 + 3a \cdot 5^2 + 5^3 - a^3$$

$$S, S' = ? \text{ cm}^2 \quad = 15a^2 + 75a + 125 \quad (2a \cdot 5) \quad a^3 + 3a^2 \cdot 5 + 3a \cdot 5^2 + 5^3$$

$$485 = 15a^2 + 75a + 125 \quad | :5$$

$$97 = 3a^2 + 15a + 25$$

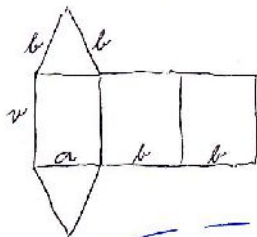
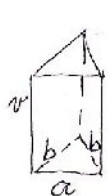
$$3a^2 + 15a - 72 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 4 \cdot 3 \cdot 72}}{6} = \frac{-15 \pm \sqrt{1089}}{6} = \frac{-15 \pm 33}{6} \quad \begin{cases} \frac{18}{6} = 3 \text{ cm} \\ -\frac{48}{6} = -8 \text{ cm} \text{ nepřijímáme} \end{cases}$$

$$S = 6a^2 = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$$

$$S' = 6a'^2 = 6(3+5)^2 = 6 \cdot 64 = 384 \text{ cm}^2$$

- 9) Podstavou kolmého hranolu je rovnostranný Δ , jehož nákladem má délku $a = 10 \text{ cm}$ a úhel při nákladu má velikost $\alpha = 40^\circ 20'$. Uveďte objem tohoto hranolu, je-li obsah jeho pláště roven součtu obsahů jeho podstav.



$$\alpha = 40^\circ 20'$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$S_{pl} = 2S_p$$

$$V = ? \text{ cm}^3$$



$$\sin \alpha = \frac{v_D}{v}$$

$$v_D = \frac{v}{\sin \alpha}$$

$$v_D = 5 \cdot \sin 40^\circ 20'$$

$$v_D = 4,24 \text{ cm}$$

$$V = S_p \cdot v$$

$$V = \frac{1}{2} a v_D v$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4,24 \cdot 1,83$$

$$V = 38,8 \text{ cm}^3 \approx 39 \text{ cm}^3$$

$$S_{pl} = 2bv + av$$

$$S_p = S_D = \frac{1}{2} av_D$$

$$S_{pl} = v(2b + a)$$

$$S_{pl} = 2S_p$$

$$v(2b + a) = 2 \cdot \frac{1}{2} av_D$$

$$v = \frac{av_D}{2b + a}$$

$$v = \frac{10 \cdot 4,24}{2 \cdot 6,56 + 10}$$

$$v = \frac{42,4}{23,12} = 1,83 \text{ cm}$$

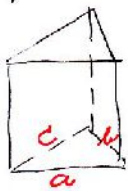
$$\cos \alpha = \frac{a/2}{v_D}$$

$$b \cos \alpha = \frac{a}{2}$$

$$b = \frac{a}{2 \cos \alpha} = \frac{10}{2 \cos 40^\circ 20'}$$

$$b = 6,56 \text{ cm}$$

- 10) Uveďte výšku kolmého trojbokého hranolu s objemem 200 cm³, jehož podstavní strany mají délky 4 $\frac{1}{3}$ cm, 10 cm, 12 $\frac{1}{3}$ cm.



$$V = 200 \text{ cm}^3$$

$$a = 4 \frac{1}{3} \text{ cm}$$

$$b = 10 \text{ cm}$$

$$c = 12 \frac{1}{3} \text{ cm}$$

$$v = ? \text{ cm}$$

$$V = S_p \cdot v$$

$$v = \frac{V}{S_p}$$

$$v = \frac{200}{20}$$

$$v = 10 \text{ cm}$$



S_p ... obsah Δ , známé délky stran $\Rightarrow$ HERONŮV VZOREC

$$S_D = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{kde } s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26 \frac{1}{3}}{2} = 13 \frac{1}{3}$$

$$S_D = \sqrt{13 \frac{1}{3} (13 \frac{1}{3} - 4 \frac{1}{3}) (13 \frac{1}{3} - 10) (13 \frac{1}{3} - 12 \frac{1}{3})}$$

$$S_p = \sqrt{13 \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot 1} = \sqrt{\frac{40}{3} \cdot \frac{10}{3} \cdot 9} = 20 \text{ cm}^2$$

- 11) Kolik m³ kamínů je třeba přemísit při výkopu přímého 170 cm dlouhého
5.54 a 80 cm hlubokého rodného příkopu, jehož peřín mđ křan rovnoramenného
30 lichobéžníku se nakladaně dđlek 150 cm a 90 cm.

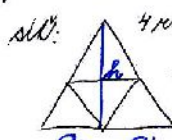
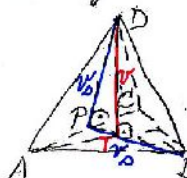


! POZOR
NA JEDNOTKY!

$$\begin{aligned} a &= 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m} \\ c &= 90 \text{ cm} = 0,9 \text{ m} \\ h &= 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m} \\ r &= 170 \text{ m} \\ V &= ? \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= S_p \cdot r \\ V &= S_{\square} \cdot r \\ V &= \frac{a+c}{2} \cdot h \cdot r \\ V &= \frac{1,5+0,9}{2} \cdot 0,8 \cdot 170 = 163,2 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

- 12) Vđl prav. čtyřšstěnu je rovnoramenný Δ s výškou $h = 6 \text{ cm}$. Vědđv
5.55 objem a povrch tohoto čtyřšstěnu.



4 rovnoramenné Δ

$$h = 2v_0$$

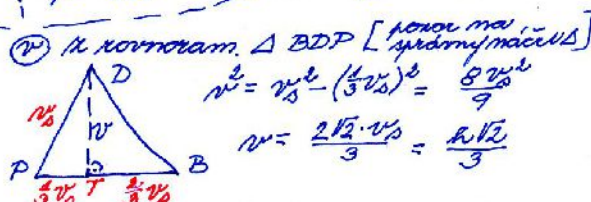
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_p \cdot h \\ V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \\ V &= \frac{a^3 \sqrt{3}}{36\sqrt{3}} \\ V &= \frac{6^3 \cdot \sqrt{3}}{36\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ V &= \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 4S_{\Delta} \quad S = S_{\text{celk}} \\ S &= 4 \cdot \frac{1}{2} a v_0 \quad S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h \\ S &= 2a v_0 \rightarrow S = ah \\ S &= \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \\ S &= \frac{36}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{3} \\ S &= 12\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

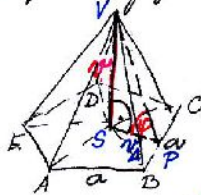
$$\begin{aligned} S_p &= \frac{S_{\text{celk}}}{4} \\ S_p &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h}{4} \\ S_p &= \frac{ah}{4} \\ S_p &= \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h}{4} \\ S_p &= \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2) k rovnoram. ΔACD

$$\begin{aligned} a^2 &= v_0^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ a^2 - \frac{a^2}{4} &= v_0^2 \\ \frac{3a^2}{4} &= v_0^2 \\ a^2 &= \frac{4v_0^2}{3} \\ a &= \frac{2v_0}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



- 13) Vypočđte objem pravid. pětibokého jehlany, mají-li postřanné
5.60 hrany dđlek $a = 5,2 \text{ cm}$ a odchýlka roviny bořníkř stěny a roviny
3+20 podřady je $\varphi = 38^\circ$.



$$\begin{aligned} S_p &= 5S_{\Delta BCS} \\ S_p &= 5 \cdot \frac{1}{2} a v_{\Delta} \\ S_p &= 2,5 \cdot 5,2 \cdot 3,58 \\ S_p &= 46,54 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_p \cdot v \\ V &= \frac{1}{3} \cdot 46,54 \cdot 2,8 \\ V &= 43,44 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

k rovnoram. ΔBCS

uř. úhel při vrcholu S: $\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

$$\begin{aligned} \lg \frac{a}{2} &= \frac{a}{v_{\Delta}} \\ v_{\Delta} \cdot \lg \frac{a}{2} &= \frac{a}{2} \\ v_{\Delta} &= \frac{a}{2 \lg \frac{a}{2}} \\ v_{\Delta} &= \frac{5,2}{2 \lg 2,6} = 3,58 \text{ cm} \end{aligned}$$

2) $v = |VS|$
k $R \Delta VSP$

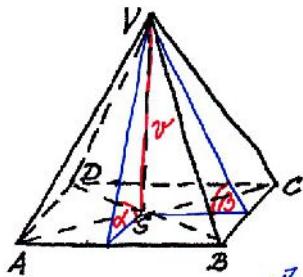
$$\begin{aligned} \lg \varphi &= \frac{v}{v_{\Delta}} \\ v &= v_{\Delta} \lg \varphi \\ v &= 3,58 \cdot \lg 38^\circ \\ v &= 2,8 \text{ cm} \end{aligned}$$

OBECE

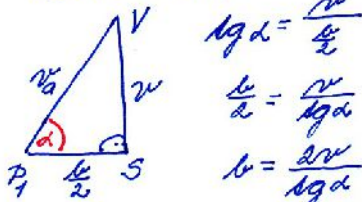
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_p \cdot v \\ V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} a \cdot \frac{a}{2 \lg \frac{a}{2}} \cdot \frac{a}{2 \lg \frac{a}{2}} \cdot \lg \varphi \\ V &= \frac{5}{24} \cdot \frac{a^3}{\lg^2 \frac{a}{2}} \cdot \lg \varphi \\ V &= 43,356 \text{ cm}^3 = 43,36 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- 14) Vypočítejte objem a povrch kolmého čtyřbokého jehlanu ABCDV s obdelníkovou podstavou, má-li-li výška jehlanu $v = 5 \text{ cm}$ a odchylky $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ roviny stěn ABV, BCV a roviny podstavy.

JEHLAN



14) $\triangle R \triangle P_1SV$



$$\lg d = \frac{v}{\frac{l}{2}}$$

$$\frac{l}{2} = \frac{v}{\lg d}$$

$$l = \frac{2v}{\lg d}$$

$$[l = \frac{2 \cdot 5}{\lg 30^\circ} = 17,3]$$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} a b v$$

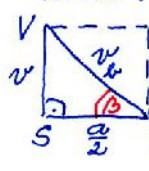
$$\left[\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2v}{\lg d} \cdot \frac{2v}{\lg \beta} \cdot v \text{ OBEČNE} \\ V &= \frac{4v^3}{3 \lg d \cdot \lg \beta} = \frac{4 \cdot 5^3}{3 \lg 30^\circ \lg 45^\circ} \\ V &= 288,7 \text{ cm}^3 \end{aligned} \right]$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 17,3 \cdot 5$$

$$V = 288,3 \text{ cm}^3$$

14) $\triangle R \triangle P_2SV$

$\beta = 45^\circ$ normovam. $R \triangle$



$\frac{a}{2} = v$

$$a = 2v = 10 \text{ cm}$$

NEBO OBEČNE

$$\lg \beta = \frac{v}{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{v}{\lg \beta}$$

$$a = \frac{2v}{\lg \beta}$$

$$[a = \frac{2 \cdot 5}{\lg 45^\circ} = 10]$$

14) $\triangle R \triangle P_2SV$ (plocha)

$$\sin \beta = \frac{v}{v_a}$$

$$v_a = \frac{v}{\sin \beta}$$

$$v_a = \frac{5}{\sin 45^\circ} = 7,1 \text{ cm}$$

14) $\triangle R \triangle P_1SV$ (plocha)

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_a}$$

$$v_a = \frac{v}{\sin \alpha}$$

$$v_a = \frac{5}{\sin 30^\circ} = 10 \text{ cm}$$

$$S = S_p + 2S_{AB} + 2S_{BC}$$

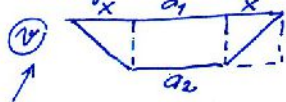
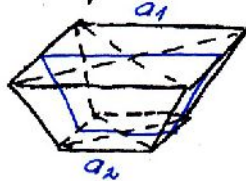
$$S = ab + 2 \cdot \frac{1}{2} a v_a + 2 \cdot \frac{1}{2} b v_b$$

$$S = ab + a v_a + b v_b$$

$$S = 10 \cdot 17,3 + 10 \cdot 10 + 17,3 \cdot 7,1 = 395,8 \text{ cm}^2$$

$$\left[\begin{aligned} \text{OBEČNE} \quad S &= \frac{2v}{\lg \beta} \cdot \frac{2v}{\lg \alpha} + \frac{2v}{\lg \beta} \cdot v \sin \alpha + \frac{2v}{\lg \alpha} \cdot v \sin \beta \\ S &= 2v^2 \left(\frac{2}{\lg \alpha \cdot \lg \beta} + \frac{1}{\sin \alpha \cdot \lg \beta} + \frac{1}{\sin \beta \cdot \lg \alpha} \right) \\ S &= 395,5 \text{ cm}^2 \end{aligned} \right]$$

- 15) Jámek má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu s podstavami 14 m a 10 m, roviny bočních stěn a roviny podstavy mají odchylku 45° . Kolik m³ kamene bylo vykopáno. Kolik m³ betonu je třeba na vybetonování jámy, má-li být tloušťka betonu 1 dm? odchylka 45° (kruhyhodně vykopáno) **KOMOLÝ JEHLAN**



$$x = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{14 - 10}{2} = 2 \text{ m}$$

$$v = x = 2 \text{ m (normovam. R \triangle)}$$

$$[\text{NEBO } \lg 45^\circ = \frac{v}{x} \Rightarrow v = x \cdot \lg 45^\circ = x = 2 \text{ m}]$$

$$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{1}{3} v (a_1^2 + \sqrt{a_1^2 a_2^2} + a_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3} v (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2 (14^2 + 14 \cdot 10 + 10^2)$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot 436$$

$$V = 290,7 \text{ m}^3 \approx 291 \text{ m}^3$$

$$\text{BETON: } \Delta V = V - V'$$

$$\Delta V = 290,7 - 267,1$$

$$\Delta V = 23,6 \text{ m}^3$$

$$V' = 14 - 2 \cdot 0,1 = 13,8 \text{ m}$$

$$a_2' = 9,8 \text{ m} \quad v = 2 - 0,1 = 1,9 \text{ m}$$

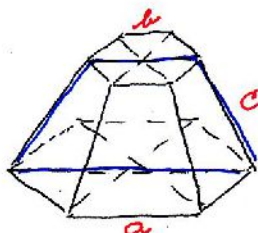
$$V' = \frac{1}{3} \cdot 1,9 (13,8^2 + 13,8 \cdot 9,8 + 9,8^2)$$

$$V' = \frac{1,9}{3} \cdot 421,76$$

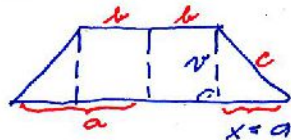
$$V' = 267,1 \text{ m}^3$$

- 16) Pravidelný šestiúhelníkový komolý jehlan má podstavní hrany $a = 65 \text{ cm}$, $b = 25 \text{ cm}$ a boční hrany $c = 85 \text{ cm}$. Vypočítejte objem tělesa.

(5*) 30



17) K lichobížík. normotram.



$$\begin{aligned} v^2 &= c^2 - x^2 \\ v^2 &= c^2 - (a-b)^2 \\ v &= \sqrt{c^2 - (a-b)^2} \\ v &= \sqrt{85^2 - 40^2} \\ v &= 75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{a}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \\ V &= \frac{75}{3} (10976,87 + \\ &\quad + \sqrt{10976,87 \cdot 1623,8} + 1623,8) \\ V &= 420563 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

18) $S_1 = 6S_a = 6 \cdot \frac{1}{2} a v_a$
 $S_1 = 3a v_a$
 $S_1 = 3 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 $S_1 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
 $S_1 = \frac{3 \cdot 65^2 \sqrt{3}}{2}$
 $S_1 = 10976,87 \text{ cm}^2$

19) výška normotram. Δ



$$\begin{aligned} a^2 &= v_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ v_a^2 &= a^2 - \frac{a^2}{4} \\ v_a^2 &= \frac{3a^2}{4} \\ v_a &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

OBECE

$$\begin{aligned} V &= \frac{a}{3} \left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}} + \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} \right) \\ V &= \frac{a}{3} \left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{9 \cdot 3 \cdot a^2 b^2}{4}} + \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} \right) \\ V &= \frac{a}{3} \left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3ab\sqrt{3}}{2} + \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} \right) \\ V &= \frac{a}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + ab + b^2) \\ V &= \frac{a\sqrt{3}}{2} (a^2 + ab + b^2) \\ V &= \frac{75\sqrt{3}}{2} (65^2 + 65 \cdot 25 + 25^2) \\ V &= 420563,6 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

20) obdrtí
 $S_2 = 6S_b = 6 \cdot \frac{1}{2} b v_b$
 $S_2 = 3b v_b$
 $S_2 = 3b \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2}$
 $S_2 = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$
 $S_2 = \frac{3 \cdot 25^2 \sqrt{3}}{2}$
 $S_2 = 1623,8 \text{ cm}^2$

21) výška v_b

$$v_b = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

- 17) Kolikrát je větší objem kvádrů s rozměry a, b, c , než tělesa-li tyto rozměry po řadě k-krát, l-krát, m-krát.

30

$$V = abc$$

$$V' = a'b'c'$$

$$a' = ka \quad b' = lb \quad c' = mc$$

$$V' = ka \cdot lb \cdot mc$$

$$V' = klm \cdot (abc)$$

$$V' = klmV \quad \underline{\underline{klm\text{-}krát}}$$

NEBO

$$\frac{V'}{V} = \frac{ka \cdot lb \cdot mc}{abc} = klm$$